

NO

DATE 15/05/17

Πρόταση: Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ
 ΝΕΤΕΡ. ΔΙΑΓΡΑΜΜΟΣ, $T: V \rightarrow V$ ΔΡΑΣΤΙΚΗ,
 $e = (e_1, \dots, e_n)$, ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ V .
 Τότε: $[T^*]_e^e = ([T]_e^e)^T$

*Πρόσφατη χρησιμοποιείται η βάση να είναι
 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ και να χρησιμοποιείται ίδιο
 Βάση πάνω-κάτω.

Απόδ.

Έστω $[T]_e^e = (a_{ij})$, $[T^*]_e^e = (b_{ij})$

Τότε $T(e_i) = \sum_{p=1}^n a_{pi} e_p$

$T^*(e_j) = \sum_{q=1}^n b_{qj} e_q$

Για i, j έχουμε $\langle T(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, T^*(e_j) \rangle$

$\Leftrightarrow \langle \sum_{p=1}^n a_{pi} e_p, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{q=1}^n b_{qj} e_q \rangle$

$\Leftrightarrow \sum_{p=1}^n a_{pi} \langle e_p, e_j \rangle = \sum_{q=1}^n b_{qj} \langle e_i, e_q \rangle \Leftrightarrow a_{ji} = b_{ji}$

Από το αποτέλεσμα έπεται.

Προβλημα: Έστω $(V, \cdot, \cdot)$ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΣ
 με περ. διὰ στοιχείων. $T: V \rightarrow V$ γραμμική,

$e = (e_1, \dots, e_n)$ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ V

Τότε: α) T ΑΥΤΟΓΡΕΓΙΜΟΣ Ή ΟΙ $T^* = T^{-1}$
 ΟΙ Ή ΟΙ Ή ΟΙ T ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ
ΟΙ $[T]_e^e$ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ

β) $T^* = T$ ΟΙ $[T]_e^e$ ΕΙΝΑΙ ΓΩΝΙΑ
 ΡΕΚΤΟΣ.

Απόδ.

Απόδειξη από το προηγούμενο.

Προτάση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ΓΩΝΙΑΚΟΣ. Τότε
 i) Ο A ΕΧΕΙ n ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ,
 Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

ii) ΥΠΑΡΧΕΙ $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ ΟΓΤΕ

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

NO

DATE

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η συνθήκη $A^t = A$ αν το
 σώμα δεν είναι το $\mathbb{R}$ δεν αρκεί για
 να είναι ο $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ διαγωνίσιμος.

Για παράδειγμα: έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$

Φοβερά $A^t = A$.

Έχουμε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = x^2$

Αρα $m_A(x) = x$ ή $m_A(x) = x^2$. Αν $m_A(x) = x \Rightarrow$

$0_{\mathbb{R}^2} = m_A(A) = A$, οπότε όχι.

Αρα $m_A(x) = x^2 \Rightarrow A$ όχι διαγwg. στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 1: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ κυβοεπίκλιτος, $\lambda \in \mathbb{C}$
 ιδιοτιμή. Τότε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2: (Θεωρήματα θεωρήματα της Άλγεβρας)
 Λάβε ένα σταθερό πολώνυμο στο $\mathbb{C}$ έχει ρίζα
 στο $\mathbb{C}$.

Πορίσμα 3: Το χαρακτηριστικό πολώνυμο

$\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$, από πρόταση 2 έχει ρίζα

στο $\mathbb{C}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε λ ιδιοτιμή στο

$\mathbb{C}$ του A . Από πρόταση 1, $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω

$V \in V_A(\lambda) \subseteq \mathbb{R}^{n \times 1}$ km μονοεικό

Βήμα 4: Θεωρείς $\omega = \langle v \rangle^\perp \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ως προς το κανονικό ε.ς.

Πρόταση 5: Έχουμε $A\omega \in \omega$ $\forall \omega \in \omega$.

Πρόταση 6: Από πρόταση 5, μπορούμε να βρούμε για περιορισμό του A στην ορθογώνια $\omega \rightarrow \gamma \omega$.

Έχουμε $\dim \omega = n-1$ και θα δείξουμε ότι έχουμε στο n . (Η περίπτωση $n=1$ προφανής)

Απόδειξη: πρόταση 1)

Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A . Αρα $\exists \omega \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ τέτοιο μηδενικό με $A\omega = \lambda\omega$ (1)

$$(1) \Rightarrow (A\omega)^\top = (\lambda\omega)^\top \Rightarrow$$

$$\bar{A}\bar{\omega} = \bar{\lambda}\bar{\omega} \Rightarrow A\bar{\omega} = \bar{\lambda}\bar{\omega} \quad (2)$$

$\uparrow$
(γιατί $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$$(A\bar{\omega})^\top \omega = \bar{\omega}^\top A^\top \omega \stackrel{A^\top = A}{=} \bar{\omega}^\top (A\omega) = \bar{\omega}^\top (\lambda\omega) =$$

$$= \bar{\lambda}\bar{\omega}^\top \omega \quad (3)$$

$$\text{Επίσης } (A\bar{\omega})^\top = \bar{\lambda}\bar{\omega}^\top \omega \quad (4)$$

$$\text{Αρα από } (3) + (4) \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda})\bar{\omega}^\top \omega = 0 \times 1$$

$$\Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

1×1 γίνεται με θεωρούμε στοιχείο

$$\text{για } \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} + 0 \times 1 \text{ και } \bar{\omega}^\top \omega$$

$$\bar{\omega}^\top \omega = (\omega_1)^2 + \dots + (\omega_n)^2$$

NO

DATE

$$\begin{aligned}
 \text{Εκχώρε } x^T y &= \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1 x)^T y \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\lambda_1} (Ax)^T y = \\
 &= \frac{1}{\lambda_1} x^T A^T y \stackrel{A^T=A}{=} \frac{1}{\lambda_1} x^T (Ay) \stackrel{(2)}{=} \\
 &= \frac{1}{\lambda_1} x^T (\lambda_2 y) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^T y.
 \end{aligned}$$

$$\text{Απο } x^T y = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^T y \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x^T y = 0 \quad x \neq 0$$

$$\stackrel{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Rightarrow} x^T y = 0 \quad x \neq 0$$

$$\text{Αλλά } \langle y, x \rangle = \text{Tr}(x^T y), \text{ απο } x \perp y.$$

Συμπέρασμα: Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμβολιστικά $\exists$ ορθογώνια $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ του $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ώστε κάθε e_i ιδιοδιάνυσμα του A με πραγματική ιδιοτιμή $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | \dots | e_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. (Νόμος P ορθογώνιος ως $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$).

NO

DATE

Ουκωδίο 7, Ασκηση 2)

ΕΓΓΩ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Βολυετρικός. Βρείτε ορδονισμό πινάκων
 $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και διαγώνιο πίνακα

$$D \text{ ώστε } P^{-1}AP = D.$$

ΛύσηΒήμα 1ο:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)(x^2 - 3x + 1) - (1-x) =$$

$$= (1-x)(x^2 - 3x + 1) = -(x-1)x(x-3)$$

Επομένως ιδιοτιμές 0, 1, 3, όλες με
 αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

Υπολογισμός $v_A(0)$

Μετά τις πράξεις έχει βάση $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

από από βάση:

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

NO DATE

Η ορθογώνιος $V_A(1)$ έχει ορθοκανονική βάση

$$e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Η ορθογώνιος $V_A(3)$ έχει ορθ. βάση

$$e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Τότε P ορθογώνιος και $P^{-1}AP = D$

*Παρατηρήσεις: Το σύνθετο Βήμα να χωρίζεται να κανονικά είναι Gram-Schmidt σε βήματα από τους υπόλοιπους.

*Παρατηρήσεις: P ορθογώνιος $\Rightarrow P^{-1} = P^t$.

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός.
 Ο A λέγεται θετικά ορισμένος αν
 $\forall v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ km μηδενικό έχουμε:
 $\text{Tr}(v^T A v) > 0$.

Ο A λέγεται αρνητικά ορισμένος
 αν $\forall v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ km μηδενικό έχουμε
 $\text{Tr}(v^T A v) < 0$.

Παράδειγμα: 1) Ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ δεν
 είναι θετικά ορισμένος γιατί:

$$\text{για } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Tr} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \text{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \text{Tr} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}}$$

Για τον ίδιο λόγο ο A δεν είναι
 αρνητικά ορισμένος.

2) Ο $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά
 ορισμένος γιατί αν

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ km μηδενικό έχουμε

$$\text{Tr}(v^T A v) = -5v_1^2 - 6v_2^2 < 0_{\mathbb{R}}$$

NO

DATE

Παράδειγμα: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a, b > 0$ ο
 γινόμενος $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ είναι θετικά
 ορισμένος, διότι για $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
 έχουμε $\text{Tr}(v^t A v) = a v_1^2 + b v_2^2 > 0$

Παρατήρηση: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός.
 Ορίζουμε $\phi: \mathbb{R}^{n \times 1} \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\phi(u, w) = \text{Tr}(w^t A u)$$

Η ϕ είναι διγραμμική (είσοδο)

ϕ είναι συμμετρική διότι

$$\begin{aligned} \phi(w, u) &= \text{Tr}(u^t A w) \stackrel{A=A^t}{=} \text{Tr}(u^t A^t w) \\ &= \text{Tr}((u^t A^t w)^t) = \text{Tr}(w^t A u) = \phi(u, w) \end{aligned}$$

Από ϕ έστω $\gamma(u, w) \in \mathbb{R}$ θετικά ορισμένος